MATEMÁTICA DISCRETA II

Observaciones:
- TIEMPO: 3 h
- Sólo se valorarán las respuestas que estén justificadas correctamente.
- No está permitido el uso de dispositivos electrónicos.

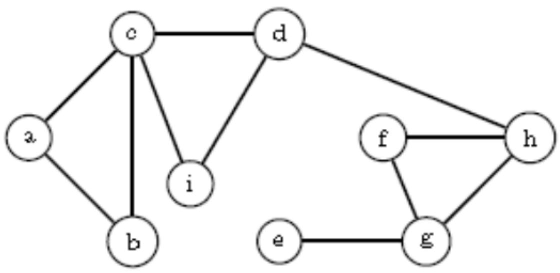
EJERCICIO 1 (2,5 ptos.)
Responder a las siguientes cuestiones:

A) Dibujar dos árboles con raíz de 8 vértices, igual número de hojas, igual altura y que no sean isomorfos.

B) Estudiar si un árbol con la sucesión gráfica [4, 3, 3, 1, 1, 1, 1, 1, 1] puede tener el código de Prüfer C = (6, 8, 6, 6, 8, 1, 6).

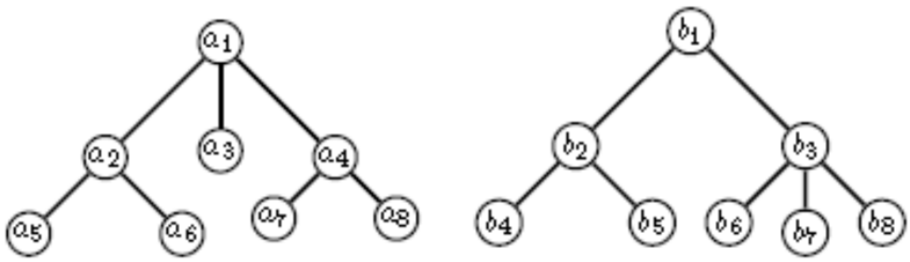
C) Razonar si puede existir un grafo de 44 vértices con diámetro 10 e índice de conectividad (por vértices) 5.

D) Dar el conjunto de vértices-corte y aristas-puente del siguiente grafo.

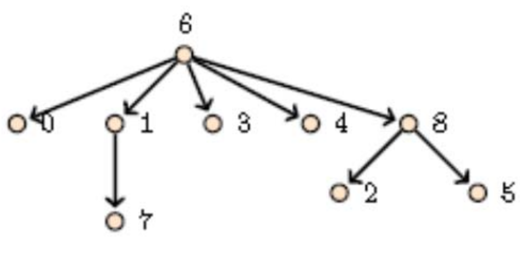


SOLUCIÓN

A) Por ejemplo, los siguientes árboles tienen altura 2 y 5 hojas y no son isomorfos:



B) El código de Prüfer (6, 8, 6, 6, 8, 1, 6) corresponde al siguiente árbol con sucesión gráfica [5, 3, 2, 1, 1, 1, 1, 1]:



C) Si diam(G) = 10 entonces existen dos vértices x, y tal que la longitud del camino mínimo que los conecta es 10. El número de vértices interiores del camino es 9 (sin contar x, y). Si $\kappa(G) = 5$

entonces hay al menos 5 caminos disjuntos internamente que conectan el vértice x con y. Luego el grafo tiene al menos 9*5 + 2 = 47 vértices.

D) Conjunto de aristas-puente {{d, h}, {e, g}}. Conjunto de vértices-corte {c, d, h , g}.

EJERCICIO 2 (2,5 ptos.)

A) Sea *G* = (V, A) un grafo simple de 76 aristas y de 14 vértices, cuyos grados son no inferiores a 9. Hallar la sucesión gráfica de *G* sabiendo que *G* es euleriano.

B) Probar que si un grafo *G* con n vértices es hamiltoniano y regular de grado 3, entonces el índice cromático (por aristas) de *G* es 3.

C) Describir los pasos del algoritmo de Fleury y aplicarlo para obtener un recorrido euleriano cerrado (circuito) en el grafo de vértices V = {1, 2, ..., 8} cuya matriz de adyacencia es:

$$M_a(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

SOLUCIÓN (0,75 - 0,75 – 1)

A) Si *G* simple, tiene n = 14 vértices y *G* es euleriano, entonces $d(v) = \begin{cases} 10 \\ 12 \end{cases}$, ∀v∈ V

$$\sum_{1}^{n} \delta(v) = 2q = 152 \Rightarrow 10x + (14 - x)12 = 152 \Rightarrow x = 8$$

Hay 8 vértices con grado 10 y 6 vértices con grado 12.

B) Si *G* es hamiltoniano y tiene n vértices entonces contiene un ciclo con n aristas.

Si *G* es regular de grado 3 entonces el número de vértices de *G* es n par.

Las aristas del ciclo que contiene a los n vértices se colorean con dos colores y las aristas restantes con un tercer color, luego el índice cromático de *G* es 3.

C) *C* = [1, 2, 3, 6, 7, 2, 6, 5, 4, 1, 5, 8, 1]

EJERCICIO 3 (2,5 ptos.)

Un operador por cable quiere introducirse en una comarca que consta de 8 poblaciones, que etiquetamos alfabéticamente desde la A hasta la H. En la siguiente tabla cada entrada indica el número de rollos de cable que se han de utilizar para conectar entre sí las poblaciones correspondientes a su fila y columna, sobrentendiendo que los huecos vacíos corresponden a poblaciones que no pueden conectarse directamente.

	A	B	C	D	E	F	G	H
A		4			5			
B	4		4					
C		4		2	5	3		
D			2			1		6

E	5		5			1	4	
F			3	1	1		2	5
G					4	2		3
H				6		5	3	

Se pide:

A) Determinar, usando el algoritmo apropiado, cuál es el número mínimo de rollos de cable que podemos utilizar para conectar las poblaciones *A* y H.
Indicar las distintas poblaciones intermedias por las que pasa el cable.
¿Existe más de una forma de conectar *A* y H usando el mismo número de rollos de cable?

B) Determinar, usando el algoritmo apropiado, cuál es el número mínimo de rollos de cable que podemos utilizar para conectar todas las poblaciones.

SOLUCIÓN

A) Usaremos el algoritmo de Dijkstra para encontrar el camino de coste mínimo para conectar las poblaciones *A* y H, cuyos pasos quedan recogidos en la siguiente tabla:

A	B	C	D	E	F	G	H	Vértice	Arista
0	-	-	-	-	-	-	-	A	-
-	4	-	-	5	-	-	-	B	**AB**
-	-	8	-	5	-	-	-	E	**AE**
-	-	8	-	-	6	9	-	F	**EF**
-	-	8	7	-	-	8	11	D	**FD**
-	-	8	-	-	-	8	11	C	**BC**
-	-	-	-	-	-	8	11	G	**FG**
-	-	-	-	-	-	-	11	H	**FH**

El camino pedido es A-E-F-H, con un coste de 11 rollos.
Existe otro camino con el mismo coste, A-E-F-G-H.

B) El problema se puede resolver usando el algoritmo de Kruskal, en el que partiendo de una arista de mínimo coste se construye un grafo añadiendo en cada paso una arista de menor coste sin que forme ciclo en el grafo construido, El árbol resultante está formado por las aristas en rojo.

	A	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**	**H**
A		4			5			
B	4		4					
C		4		2	5	3		
D			2			1		6
E	5		5			1	4	
F			3	1	1		2	5
G					4	2		3
H				6		5	3	

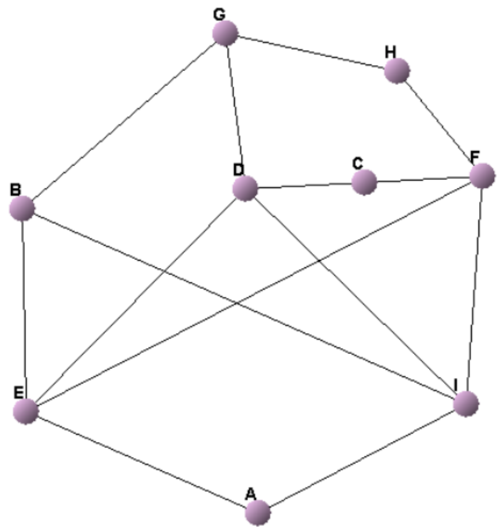
EJERCICIO 4 (2,5 ptos.)

Sea ***G*** el grafo de la figura.

A) Enunciar el teorema de Kuratowski y utilízarlo para demostrar que ***G*** no es planar.

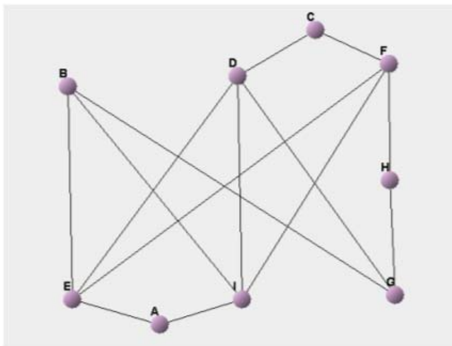
B) Utilizar el algoritmo de Brélaz, detallando los pasos del algoritmo, para obtener una coloración de vértices del grafo ***G***.

C) Justificar cuál es el número cromático de ***G***.

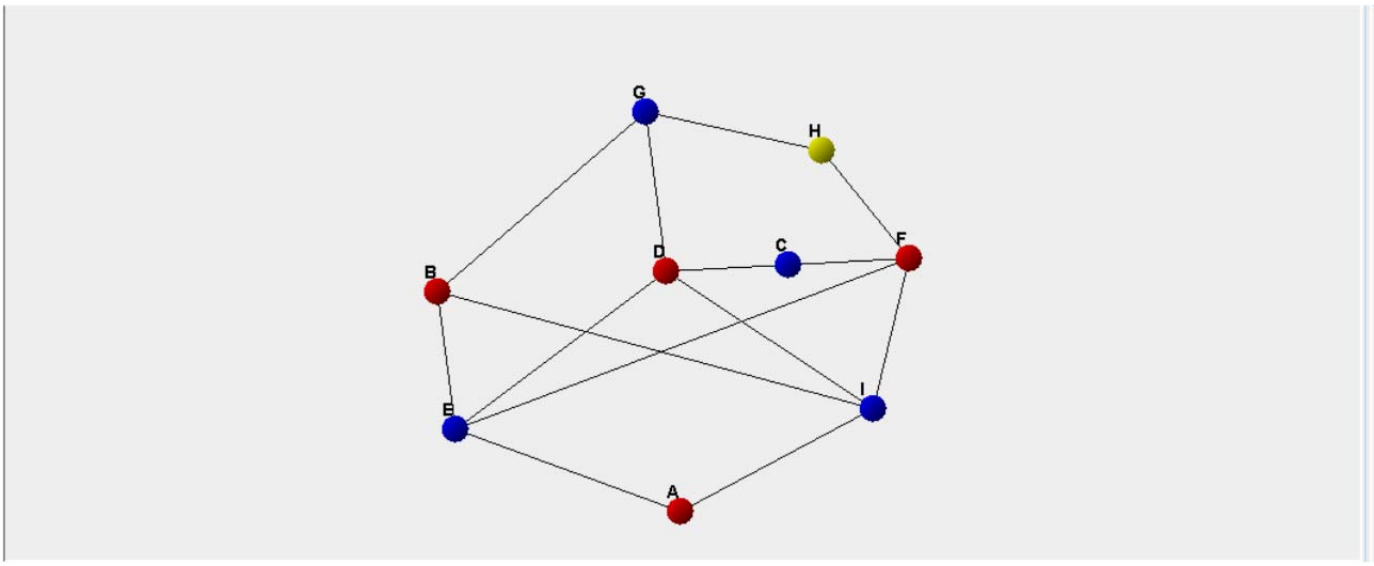


SOLUCIÓN

A) Eliminando los vértices A y C (y las aristas incidentes con ellos), obtenemos un subgrafo homeomorfo a $K_{3,3}$ ($K_{3,3}$ se obtiene mediante el borrado del vértice H).



B)



C) El número cromático $\chi(\boldsymbol{G}) = 3$ ya que tiene un ciclo impar [C, D, G, H, F, C] por lo que no es bipartido y por tanto no se puede encontrar una 2-coloración y, además, es fácil encontrar una 3-coloración (con Brélaz se obtiene una).